Manipulation d'intégrales

Partie I

Soit $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ une fonction continue. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on pose $I_n=\int_0^1 t^n f(t)\mathrm{d}t$.

1.a Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n=0$.

1.b On suppose f de classe $\mathcal{C}^1$ et $f(1)\neq 0$. Etablir $I_n\sim\dfrac{f(1)}{n}$.

2. On suppose dans cette question f définie par $f(t)=\dfrac{1}{1+t^2}$.

2.a Calculer I_0 et I_1.

2.b Former une relation de récurrence entre I_n et I_{n+2}.

2.c On pose, pour tout $p\in\mathbb{N}$: $U_p=\sum\limits_{k=1}^{p}\dfrac{(-1)^{k-1}}{2k-1}$.

Déterminer $U=\lim\limits_{p\to+\infty} U_p$ ainsi qu'un équivalent de $U-U_p$ quand $p\to+\infty$.

2.d On pose, pour tout $p\in\mathbb{N}$: $V_p=\sum\limits_{k=1}^{p}\dfrac{(-1)^{k-1}}{k}$.

Déterminer $V=\lim\limits_{p\to+\infty} V_p$ ainsi qu'un équivalent de $V-V_p$ quand $p\to+\infty$.

3. On suppose dans cette question f définie par $f(t)=\sin(\pi t)$.

3.a Etablir une relation liant I_n et I_{n+2}.

3.b On pose, pour tout $p\in\mathbb{N}$: $t_p=(-1)^p\dfrac{\pi^{2p}}{(2p)!}I_{2p}$ et $W_p=\sum\limits_{k=1}^{p}\dfrac{(-1)^{k-1}\pi^{2k-1}}{(2k)!}$.

Simplifier $t_{p+1}-t_p$.

3.c Exprimer W_p en fonction de I_0 et t_p.

3.d Déterminer $W=\lim\limits_{p\to+\infty} W_p$.

Partie II

Soit $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ une fonction continue. Pour tout $x\in[0,1[$, on pose :

$I_n(x)=\int_0^x t^n f(t)\mathrm{d}t$ et $S_n(x)=\sum\limits_{k=0}^{n} I_k(x)$.

1.a Démontrer que pour tout réel $x\in[0,1[$, $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n(x)=0$.

1.b Démontrer que pour tout réel $x\in[0,1[$, $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n(x)=F(x)$ où $F(x)=\int_0^x\dfrac{f(t)}{1-t}\mathrm{d}t$.

2. On suppose $f(t)=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$.

Calculer $F(x)$ et $\lim\limits_{x\to1^-}F(x)$.

3. On suppose $f(t)=\sqrt{\dfrac{1-t}{1+t}}$.

Calculer $F(x)$ et $\lim\limits_{x\to1^-}F(x)$.

4. On suppose $f(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{1-\ln(1-t)} & \text{si } t\neq 1\\ 0 \text{ sinon}\end{cases}$.

4.a Justifier la continuité de f .

4.b Calculer $F(x)$ et $\lim\limits_{x \to 1^-} F(x)$.